

# 无限折叠混沌映射的周期窗口分析及其均匀分布特性检验

何 迪, 何 晨, 蒋铃鸽, 诸鸿文, 胡光锐

(上海交通大学电子工程系, 上海 200030)

**摘 要:** 本文提出了一类具有较大 Lyapunov 指数的无限折叠一维迭代混沌映射, 分析了它在分岔图中出现的主周期窗口位置与长度所具有的规律性, 依此规律对参数作适当选取可产生较为理想的一维迭代混沌模型. 通过检验它在迭代区间内的均匀分布特性, 揭示了它比一般混沌系统具有更强的内随机性.

**关键词:** 无限折叠混沌映射; Lyapunov 指数; 周期窗口;  $\chi^2$  检验

中图分类号: TN914 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2001)10-1430-03

## Periodic Windows of a Chaotic Map with Infinite Collapses and the Test of Even Distribution

HE Di, HE Chen, JIANG Ling ge, ZHU Hongwen, HU Guang rui  
(Dept. of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** A one dimensional iterative chaotic map with infinite collapses which has bigger Lyapunov exponents is proposed. The locations and lengths of its periodic windows shown in bifurcation diagram are analyzed. Ideal chaotic model can be produced by selecting parameter of the map properly. The model proposed also has stronger inner randomness after testing its even distribution characteristics.

**Key words:** chaotic map with infinite collapses; Lyapunov exponent; periodic windows; test

### 1 引言

1903 年, 法国数学家 H. Poincare 在《科学与方法》一书中提出了 Poincare 猜想. 他把动力学和拓扑学两大领域结合起来, 提出了混沌存在的可能性, 被公认为发现混沌的第一人. 美国气象学家 E. Lorenz 于 1963 年在《大气科学》杂志上发表了题为“确定性的非周期流”的文章, 从而给出了混沌解的第一个例子. 其中清楚地描述了“对初始条件的敏感性”这一混沌的基本性态, 这就是著名的蝴蝶效应. 1978 年, 美国物理学家 M. J. Feigenbaum 在《统计物理学杂志》上发表了关于普适性的文章“一类非线性变换的定量的普适性”, 正是普适性的研究使混沌科学确定了自己的坚固地位. 自 1975 年起, “混沌 (chaos)”作为一个新的科学名词在文献中出现. 在非线性的动力学系统中, Li-York 定理是比较公认的、影响较大的混沌数学定义<sup>[1]</sup>.

内随机性是混沌现象所具有的三大特性之一, 吸引子在混沌区内的均匀分布特性一直是混沌模型追求的目标. Logistic 映射和 Chebyshev 映射是研究得较多的一维混沌迭代模型<sup>[2]</sup>, 从它们的概率密度函数表达式可以看出: 这两种映射都有类似均匀分布的特性. Tao, Yang 和 L. O. Chua<sup>[3]</sup>利用多种基于  $\chi^2$  检验和 K-S (Kolmogorov Smirnov) 检验的均匀分布检验方法对 Chua 氏电路混沌吸引子进行了检验, 其中包括 Serial 检

验、Gap 检验、Poker 检验等不同方法; 结果表明: 由 Chua 氏电路产生的混沌序列具有良好的伪随机特性, 并可用于生成相应的扩频序列. 这对于简化移动通信硬件设备能起到十分重要的作用.

本文以提高 Lyapunov 指数为出发点, 提出一类无穷折叠混沌映射模型. 通过对其分岔图中出现的暗线与周期窗口特性进行分析, 阐明了该模型的混沌区基本呈类似周期状等间隔分布, 且周期窗口的长度随模型参数值的增大而逐渐减小直至消失, 使参数在混沌区内有宽裕的选取范围. 最后, 在同等条件下将该模型与 Logistic 映射、Chebyshev 映射以及 Chua 氏电路混沌吸引子的均匀分布  $\chi^2$  检验进行对比, 证明无穷折叠混沌映射模型的均匀分布特性优于其他三者.

### 2 混沌模型

Lyapunov 指数或 Lyapunov 指数谱常被用来刻画混沌动力学的整体效果, 即对混沌运动轨道上各点的拉伸或压缩速率进行长时间平均<sup>[4]</sup>. 对于一维迭代混沌模型, 根据基于“相乘性遍历定理”的定义, Lyapunov 指数的大小反映了混沌映射对初始值敏感性的强弱.

常见的一维迭代混沌模型 (如 Logistic 映射、Tent 映射、Chebyshev 映射等) 在映射迭代区间内的折叠次数都是有限

的,或者其折叠次数可由某个参数值确定.这在一定程度上限制了它们的 Lyapunov 指数不可能很大.为此,我们提出一种新的一维迭代混沌映射<sup>[5]</sup>:

$$x_{n+1} = \sin(a/x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots; x_0 \neq 0 \quad a \in (0, +\infty) \quad (1)$$

其中  $a$  为可调参数.该混沌映射在区间 $[-1, 1]$ 内具有折叠次数无限的特性,并且在坐标轴原点附近出现极限振荡.为下面叙述方便,我们称该映射为“无限折叠混沌映射”.其 Lyapunov 指数可用下式进行计算:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \sin' \left( \frac{a}{x_i} \right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{a}{x_i^2} \cos \left( \frac{a}{x_i} \right) \right| \quad (2)$$

我们通过对 Lyapunov 指数的计算来比较无限折叠混沌迭代系统(以参数  $a = 2$  为例)、有限折叠混沌迭代系统(以 Logistic 映射与 4 阶 Chebyshev 映射为例)和连续混沌系统(以 Chua 氏电路为例)之间“初值敏感性”的强弱,其对比结果示于表 1.每次计算采用不同的初始值,无限折叠混沌映射、Logistic 映射和 Chebyshev 映射都不采用隔次迭代,Chua 氏电路的迭代步长为  $\Delta t = 10^{-2}$ .初始的暂态响应轨迹点已被排除.表中最后一列为前 5 次计算所得结果的平均值.计算过程在 Matlab5.3 环境下进行.

从表中的数据我们可以看出:参数  $a = 2$  的无限折叠混沌映射 Lyapunov 指数值高于其他三类混沌系统,表明它具有更好的初值敏感性.因此,一维映射  $x_{n+1} = \sin(a/x_n)$  为我们提供了一类实现简单、混沌性能更强的混沌产生方式.

表 1 不同混沌系统的 Lyapunov 指数

计算次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	平均值
$x_{n+1} = \sin(2/x_n)$	1.6627	1.7407	1.7244	1.6228	1.5976	1.6694
Logistic	0.6947	0.6958	0.6924	0.6902	0.6935	0.6933
4 阶 Chebyshev	1.3863	1.3860	1.3875	1.3895	1.3853	1.3869
Chua 氏电路	0.2088	0.2368	0.3054	0.3194	0.1684	0.2478

### 3 暗线与周期窗口

对于无限折叠混沌映射  $x_{n+1} = f(a, x_n) = \sin(a/x_n)$ , 它在映射范围 $[-1, 1]$ 内具有无穷多个平衡点(即一阶导数为 0 的点,表现为函数值达到极大或极小),而这些平衡点又可分为两组:  $C_1$  和  $C_2$ ,  $C_1$  表示函数值为 1 的一组平衡点,而  $C_2$  表示函数值为 -1 的一组平衡点.借助映射  $x_{n+1} = f(a, x_n)$  来递归地定义这两类函数族如下:

$$\begin{cases} P_0^{(1)}(a) = C_1 \\ P_{n+1}^{(1)}(a) = f(a, P_n^{(1)}(a)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} P_0^{(2)}(a) = C_2 \\ P_{n+1}^{(2)}(a) = f(a, P_n^{(2)}(a)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3b)$$

将  $f(a, x_n) = \sin(a/x_n)$  代入上两式,并将两类函数族进行合并,可得出统一形式的函数族为:

$$\begin{cases} P_0(a) = \frac{a}{(k+0.5)\pi} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ P_1(a) = f(a, P_0(a)) = \pm 1 \\ P_2(a) = f(a, P_1(a)) = \pm \sin a \\ \vdots \\ P_{n+1}(a) = f(a, P_n(a)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

函数  $P_n(a)$  即为混沌映射分岔图中所有暗线和混沌带边界的

方程.

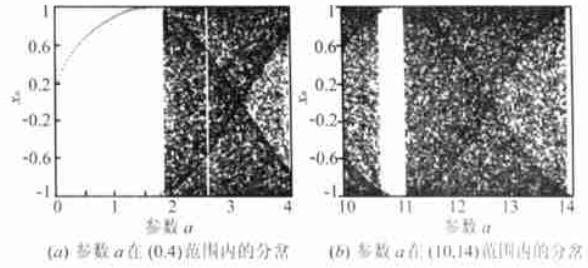


图 1 无限折叠混沌映射的分岔图

图 1 给出混沌映射相对于参数  $a$  的分岔图,可以看出  $P_2(a) = \pm \sin a$  是分岔图中最清晰的暗线和混沌带边界方程.由于该映射对参数  $a$  具有奇对称性,所以它的分岔图同样具有奇对称性,我们只研究  $a > 0$  的正半轴.从图上来看,该映射有周期窗口,并不是在任何位置都出现混沌.例如  $0 < a < 1.8627$  与  $10.6406 < a < 11.0410$  就是图 1 中两个最为明显的周期窗口,另外在  $2.5429 < a < 2.5709$  时也出现较窄的周期窗口,在这些范围内的函数迭代会产生周期序列而非混沌序列.

如果我们根据式(2)来计算该混沌映射随参数  $a$  变化的 Lyapunov 指数,可以清楚地看出它呈现一定的规律性:如图 2 所示,有一类周期窗口呈类似等间隔出现,这里不妨称之为“主周期窗口”.表 2 为前 10 个主周期窗口的起点位置、终点位置与相应的窗口长度.为避免 Lyapunov 指数值在 0 附近所产生的毛刺给周期窗口的定位带来不必要的麻烦,将周期窗口的门限值设为 1,即: Lyapunov 指数小于 1 代表进入周期窗口,大于 1 代表结束周期窗口.根据表中数据以及与暗线方程的关系可得出以下特征:

- (1)随着主窗口序号的增加,主窗口的长度依次缩小,直至趋近于 0;
- (2)每个主窗口的终点总是出现在暗线方程  $P_2(a) = \pm \sin a$  的平衡点(极值点)附近,即  $(k+0.5)\pi, k = 0, 1, 2, \dots$ ;
- (3)相邻主窗口的间隔周期约为  $\pi$ .

当主窗口序号或参数  $a$  的值增大到一定程度时(如  $a > 1500$ ),已无明显的“主周期窗口”,或者说其长度已退化到可忽略不计.

在图 2 中可以看到,除“主周期窗口”之外,还有一些相对而言并不十分明显的周期窗口,它们的窗口长度一般都较短,且出现位置没有一定的规律性,这里不妨称之为“次周期窗口”.次周期窗口在(2, 15)范围内出现得较为频繁,以后其数

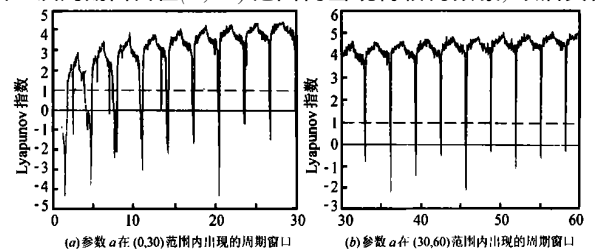


图 2 无限折叠混沌映射的周期窗口

量随着参数  $a$  的增大逐渐减少, 另外它们的窗口长度也比主周期窗口要窄得多.

掌握了无限折叠混沌映射的上述规律后, 通过对  $a$  进行适当的选取, 即可获得一族特殊的无限折叠混沌映射.

表 2 主周期窗口的位置与长度

主窗口序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
窗口起点	0.001	3.9445	7.3676	10.6406	13.8639	17.0571	20.2302	23.3934	26.5566	29.7197
窗口终点	1.8627	4.8253	7.9281	11.0410	14.1742	17.3173	20.4505	23.5836	26.7267	29.8699
$P_2(a)$ 的平衡点	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372	17.2788	20.4204	23.5619	26.7035	29.8451
窗口长度	1.8617	0.8808	0.5605	0.4004	0.3103	0.2602	0.2203	0.1902	0.1701	0.1502

#### 4 均匀分布的 $\chi^2$ 检验

遍历性是混沌的显著特性. 在研究一个特定的混沌模型时, 我们总是希望在迭代次数受限的情况下, 混沌的轨迹尽可能遍及整个迭代区间并接近均匀分布, 从而使其呈现出类似伪随机噪声的表象. 这样可使它在通信、信号处理、模式识别等方面具有更广泛的应用前景.

基于此, 我们考察无限折叠混沌映射  $x_{n+1} = \sin(a/x_n)$  在  $[-1, 1]$  范围内呈均匀分布的  $\chi^2$  检验, 选取参数  $a = 12.5$ , 位于混沌区. 为方便比较, 给出相同映射范围  $[-1, 1]$  内 Logistic 映射和 4 阶 Chebyshev 映射的  $\chi^2$  检验, 以及 Chua 氏电路混沌吸引子归一化后轨迹变化的  $\chi^2$  检验. 无限折叠混沌映射、Logistic 映射和 Chebyshev 映射都不采用隔次迭代, Chua 氏电路的迭代步长为  $\Delta t = 10^{-2}$ .

$\chi^2$  检验中的被统计量为:

$$\eta = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^m \frac{v_i^2}{np_i} - n \quad (5)$$

其中,  $n$  为抽样点总个数;  $m$  为划分区间  $[-1, 1]$  所得到的小区间个数;  $v_i$  为抽样点落入第  $i$  个小区间的频数, 或称为观察频数;  $p_i$  为抽样点落入第  $i$  个小区间的理论概率, 此处  $p_i = 1/m$ ;  $np_i$  为抽样点落入第  $i$  个小区间的理论频数. 统计量的值越小, 表明待检验模型的概率分布与均匀分布的拟合性越好.

在实际试验中, 每组检验都在自由度为  $m-1=50$  的相同条件下进行, 抽样点数为  $n=10^5$ . 各次检验选用不同的初始值, 并排除初始 200 个暂态响应取样点. 计算过程在 Matlab5.3 环境下进行, 检验结果如表 3 所示.

表 3 不同混沌系统均匀分布的  $\chi^2$  检验

	第 1 次检验	第 2 次检验	第 3 次检验	平均值
$x_{n+1} = \sin(12.5/x_n)$	$4.4435 \times 10^4$	$4.3828 \times 10^4$	$4.2935 \times 10^4$	$4.3733 \times 10^4$
Logistic	$5.8651 \times 10^4$	$6.0467 \times 10^4$	$6.2004 \times 10^4$	$6.0374 \times 10^4$
4 阶 Chebyshev	$6.1477 \times 10^4$	$5.9656 \times 10^4$	$6.1272 \times 10^4$	$6.0802 \times 10^4$
Chua 氏电路	$5.7506 \times 10^4$	$5.0643 \times 10^4$	$4.6924 \times 10^4$	$5.1691 \times 10^4$

从上面的  $\chi^2$  检验对比结果可以看出: 在相同的检验条件下, 不同模型的检验结果均处于同一数量级水平, 但是无限折叠混沌映射的检验值明显要低于另外三种混沌系统, 这说明无限折叠混沌映射在  $[-1, 1]$  范围内的均匀分布特性优于其它三者.

#### 5 结束语

本文提出一类无限折叠一维迭代混沌映射, 它具有比一般有限折叠一维迭代混沌映射和连续混沌系统更大的 Lyapunov

指数. 该映射随着其自身参数值的变化而呈现出有规律的周期窗口特性, 使得通过对参数值的适当选取可以获得更为理想的迭代混沌系统模型. 同时, 还以  $\chi^2$  检验的实验结果证明了它具有更佳的均匀分布特性. 利用该模型可以产生性能良好的伪随机序列, 因此它无论是在数字信号处理、图像信号的模式识别、保密通信中的密钥序列产生或是 CDMA 移动通信扩频码的设计等方面都有良好的实用前景, 从而为混沌迭代系统在实际工程中的应用找到了更好的实例.

参考文献:

- [1] Holden A V. Chaos [M]. Manchester University Press, 1986.
- [2] Umeno K, Kitayama K. Spreading sequences using periodic orbits of chaos for CDMA [J]. Electronics Letters, 1999, 35(7): 545-546.
- [3] Yang T, Chua L O. Chaotic digital code division multiple access (CDMA) communication systems [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1997, 7(12): 2789-2805.
- [4] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论 [M]. 上海科技教育出版社, 1993.
- [5] He D, He C, Jiang L G, et al. A chaotic map with infinite collapses [A]. IEEE 2000 TENCON Proceedings [C], Kuala Lumpur, 2000, III: 95-99.

作者简介:



何迪男, 1975 年生, 上海交通大学电子工程系博士研究生, 研究方向为: 混沌理论及其在移动通信系统中的应用.



何晨男, 1982 年, 1985 年于东南大学分别获得工学学士、工学硕士学位, 1994 年于日本国立德岛大学获得工学博士学位. 1985 年加入东南大学电子工程系, 1990 年赴日本德岛大学做访问学者, 1996 年加入上海交通大学电子工程系, 1999 年赴日本邮政省通信综合研究所做特聘研究员, 现为上海交通大学电子工程系教授, 博士生导师. 主要研究方向为新一代无线通信系统, 混沌神经网络智能信息处理理论以及在通信中的应用. 有合著专著一本, 译著一本, 发表论文 50 余篇.